2/4/20

Μήκος διαδρομής που διανύθηκε

Το μήκος μιας λείας καμπύλης

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad , a \le t \le b$$

είναι:

$$L = \int_a^b \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt = \int_a^b |\vec{v}|\, dt$$

Ας πούμε ότι είμαστε μόνο στη x-διάσταση

$$\int_a^b \left| \frac{dx}{dt} dt \right| = \int_a^b dx = x_b - x_a$$

Αυτό αποτελεί γενίκευση του συνολικού μήκους της καμπύλης για κάθε χρόνο.

Το Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της διαφορίσιμης καμπύλης $\vec{r} = \vec{r}(t)$ είναι: $\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Καμπυλότητα: Η καμπυλότητα μιας λείας καμπύλης $\vec{r}(t)$ είναι:

$$\kappa = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|$$

Ο ρυθμός που μεταβάλλεται το μήκος μιας καμπύλης με το χρόνο καλείται προσημασμένη απόσταση $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}|\, dt$

ή παράμετρος μήκους τόξου. Η μεταβλητή s μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του χρόνου.
Ορίζουμε $\boxed{\dfrac{ds}{dt} = |\vec{v}|}$: Δεν είναι μόνο παράγωγος αλλά και μια αλλαγή μεταβλ.
και συνδέουμε το διάνυσμα που διανύθηκε στον αντίστοιχο χρόνο με την ταχύτητα. Παραμετρικοποιούμε σύμφωνα με τη νέα μεταβλητή

Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα: $\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\dfrac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}}$ (*)

καμπυλότητα: $\kappa = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\left|\dfrac{d\hat{T}}{dt}\right| = \dfrac{1}{ds/dt}\left|\dfrac{d\hat{T}}{dt}\right| = \left|\dfrac{d\hat{T}}{ds}\right|$

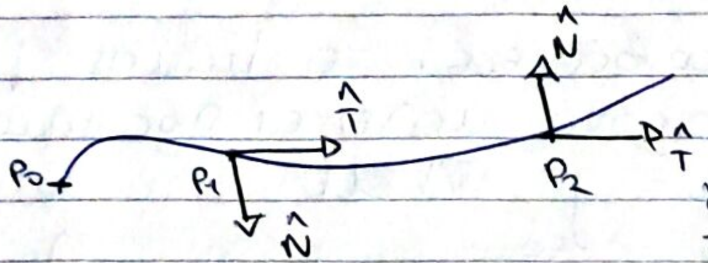
(*) κανόνας της αλυσίδας: δεν είναι διαίρεση διαφορικών

Δεν είναι πηλίκο αλλά αλλαγή μεταβλητής

Ορισμός: Ορίζουμε σε σημείο της καμπύλης με $\kappa \neq 0$ το πρωτεύον μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:

$$\boxed{\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{T}}{ds}}, \quad \kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$$

Το διάνυσμα $\frac{d\hat{T}}{ds}$ δείχνει πάντα προς την κοίλη πλευρά της καμπύλης $\rightsquigarrow \frac{d\hat{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$ ← Τι παριστά? Ισούται με $\frac{1}{|\vec{v}|}$ αλλά γιατί? Είναι η συνάρτηση και η αντίστροφή της και μπορώ να πω ότι είναι $1/|\vec{v}|$ γιατί είναι η παράγωγος της αντίστροφής της



Όμως $\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{|d\hat{T}/ds|}\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{\frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}\frac{d\hat{T}/dt}{ds/dt} =$

$= \frac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|}$

Άσκηση: ΝΔΟ ότι ισχύει αυτό $\Rightarrow$ Προφανώς $\boxed{\hat{N}\cdot\hat{T} = 0}$: πρέπει να είναι κάθετα

Από τη μία καμπύλη που έχω δημιούργησα 2 διανύσματα

Παράδειγμα: Βρείτε το $\hat{T}$ και $\hat{N}$ για την κίνηση $\vec{r} = \cos(2t)\hat{i} + \sin(2t)\hat{j}$

Η κίνηση είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$

$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$: $\hat{T}$ μοναδιαίο $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [-2\sin(2t)]\hat{i} + [2\cos(2t)]\hat{j}$

$|\vec{v}| = 2$

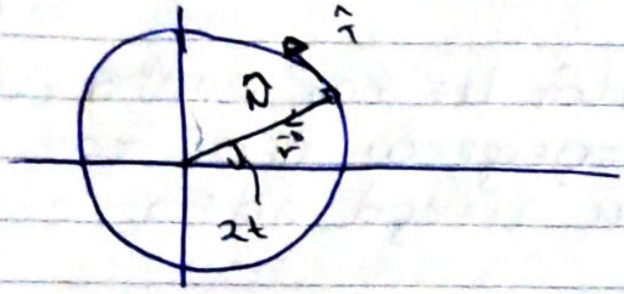
Σε χρόνο t έχω διανύσει όλο το κύκλο.

$\hat{T} = -\sin(2t)\hat{i} + \cos(2t)\hat{j}$

$\hat{N} = \dfrac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|}$, $\dfrac{d\hat{T}}{dt} = [-2\cos(2t)]\hat{i} + [-2\sin(2t)]\hat{j}$

$$\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = 2$$

$\hat{N} = (-\cos 2t)\hat{i} + (-\sin 2t)\hat{j}$: $\hat{N}$ μοναδιαίο



Ένα νέο σύστημα αξόνων

Ορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\hat{T}$, $\hat{N}$ ώστε $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$. Τα διανύσματα $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ ορίζουν ένα κινούμενο, δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς

Ιδιότητες:

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{ds} \times \hat{N} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds} = \vec{0} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds}$$

δηλ. το $\dfrac{d\hat{B}}{ds}$ είναι κάθετο στο $\hat{T}$ και $\dfrac{d\hat{N}}{ds}$ και στο $\hat{B}$ άρα $\dfrac{d\hat{B}}{ds} \parallel \hat{N}$ ή $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$

Το πρόσημο "−" είναι θέμα σύμβασης. Δηλαδή

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds} \cdot \hat{N}$$

η στρέψη

Παρατηρήσεις:

1) Η καμπυλότητα κ είναι πάντοτε θετική

2) Η στρέψη τ παίρνει όλες τις τιμές

3) Η καμπυλότητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο στρέφεται το κάθετο επίπεδο καθώς το σωματίδιο διανύει την τροχιά του

4) Η στρέψη είναι ο ρυθμός με τον οποίο το συνεφαπτόμενο επίπεδο στρέφεται περί τον άξονα του $\hat{T}$. Η στρέψη μετρά πόσο περιελίσσεται η καμπύλη

παράδειγμα: Να βρεθούν τα κ και τ της έλικας $\vec{r}(t) = (a\cos t)\hat{i} + (a\sin t)\hat{j} + (bt)\hat{j}$

$a, b \geq 0$

$a^2 + b^2 \neq 0$

Λύση:

Προφανώς $\vec{v} = (-a\sin t)\hat{i} + (a\cos t)\hat{j} + b\hat{k}$

$|\vec{v}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

Δηλαδή: $\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\hat{i} + \dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{j} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{k}$

$\hat{N} = \dfrac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|}$, $\dfrac{d\hat{T}}{dt} = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\hat{i} - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\hat{j}$

$\left|\dfrac{d\hat{T}}{dt}\right| = \sqrt{\dfrac{a^2\cos^2 t}{a^2+b^2} + \dfrac{a^2\sin^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Άρα: $\hat{N} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}$

$$\kappa = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[-\cos t\begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ a\cos t & b \end{vmatrix} + \sin t\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{k} \\ -a\sin t & b \end{vmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[-\cos t(b\hat{j} - a\cos t\hat{k}) + \sin t(b\hat{i} + a\sin t\hat{k})\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[(b\sin t)\hat{i} + (-b\cos t)\hat{j} + a\hat{k}\right]$$

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d\hat{B}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\hat{B}}{dt} = \frac{1}{a^2+b^2}\left[(b\cos t)\hat{i} + (b\sin t)\hat{j}\right]$$

Άρα $\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds}\hat{N} = \frac{b}{a^2+b^2}$